

Roberto Montenegro<sup>1</sup>  
Universidad Católica  
de Colombia

Recibido: 27 de enero de 2010  
Concepto de evaluación: 16 de marzo de 2010  
Aceptado: 20 de mayo de 2010

# Medición de la volatilidad en series de tiempo financieras

Una evaluación a la tasa de cambio representativa  
del mercado (TRM) en Colombia

## RESUMEN

Existen diferentes métodos para la medición del agrupamiento de la volatilidad en las series financieras, en las cuales el supuesto sobre la distribución del error determina la estructura de la función de log verosimilitud. En este documento se explota la flexibilidad de los modelos ARCH para capturar los agrupamientos de la volatilidad de la Tasa Representativa del Mercado TRM colombiana. Los resultados indican que el modelo MA (1) en media y el modelo GARCH (1, 1) en varianza superan otro tipo de especificación, que trate de medir el agrupamiento de la volatilidad de la TRM colombiana.

**Palabras clave:** TRM, ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH, TARCH.

## Measurement of volatility in financial time series

An evaluation of the representative exchange rate market (ERM) in Colombia

## ABSTRACT

There are different methods to measure the volatility regarding clustering in financial series, in which the assumption of the error distribution determines the structure of the log-likelihood function. This paper analyses the flexibility of ARCH models to capture the volatility of TRM in Colombia. The results show that the MA (1) model in mean and GARCH (1, 1) model in variance outperform another kind of specification, which tries to measure the volatility clustering of the TRM in Colombia.

**Key words:** TRM, ARCH, GARCH, IGARCH, EGARCH, TARCH.

<sup>1</sup> Magíster en Economía,  
Docente de Pregrado  
Universidad Católica de  
Colombia. Investigador.

## INTRODUCCIÓN

Uno de los hechos más característicos de las variables financieras y de sus rendimientos es que su volatilidad cambia con el tiempo. Además, en algunas de ellas existe acumulación de la misma volatilidad (residuales grandes tienden a estar acompañados de residuales grandes y viceversa). Conocer esta volatilidad resulta crucial debido a que un exceso de volatilidad dificulta la planificación financiera, igualmente, podría significar enormes pérdidas y/o ganancias<sup>1</sup>. Asimismo, existen varias razones técnicas que justifican el modelar y pronosticar la volatilidad, tales como: conocer el riesgo de tener un activo, pronosticar los intervalos de confianza, y/o obtener estimadores más eficientes.

El objetivo de este ejercicio, es medir la precisión que ofrecen las distintas alternativas a la hora de predecir la volatilidad futura, buscando responder: ¿cuál es el mejor método a la hora de estimar y predecir la volatilidad futura de la serie de la TRM colombiana en el periodo Enero 2001 y Septiembre de 2009?, la hipótesis es que existe un mejor modelo que el tradicional estándar de volatilidad móvil a un año. El método empleado parte de la comparación de distintos resultados donde se evidencian las ventajas y desventajas de cada uno.

Los resultados permiten afirmar que el modelo que mejor replicó la volatilidad de la diferencia del logaritmo de la TRM como modelo en media un modelo AR (2), y, como modelo en varianza un GARCH (1,1), pronostica mejor la volatilidad futura de la serie de la TRM, la importancia de estos resultados está en que a la hora de medir el riesgo en el sector real es aconsejable un modelo dinámico GARCH (1,1).

Este estudio se divide de la siguiente manera, en la primera se desarrollan los conceptos y características básicas de los modelos de predicción de volatilidad haciendo una revisión más detallada del proceso de estimación de los modelos que tratan con la volatilidad, y posteriormente hacer

<sup>1</sup> Los exportadores (importadores) pueden verse perjudicados debido a la variabilidad de las tasas de cambio

un análisis robusto aplicado a una serie financiera y comparando los resultados de diversas alternativas. Por último se presentan las conclusiones.

## LA VOLATILIDAD

La volatilidad es una característica inherente a las series de tiempo financieras. En general, no es constante y, en consecuencia, los modelos de series de tiempo tradicionales que suponen varianza homocedástica, no son adecuados para modelar series de tiempo financieras. Engle (1982) desarrolla una nueva clase de procesos estocásticos llamados modelos ARCH, en los cuales la varianza condicionada a la información pasada no es constante, y depende del cuadrado de las innovaciones pasadas. Bollerslev (1986) generaliza los modelos ARCH al proponer los modelos GARCH en los cuales la varianza condicional depende no solo de los cuadrados de las perturbaciones, como en Engle, sino además, de las varianzas condicionales de períodos anteriores. En 1991, Nelson presenta los modelos EGARCH en los cuales formula para la varianza condicional, un modelo que no se comporta de manera simétrica para perturbaciones positivas y negativas, como sucede en los modelos GARCH; expresando otro rasgo de la volatilidad: su comportamiento asimétrico frente a las alzas y bajas de los precios de un activo financiero. Un elevado número de trabajos sobre modelos de volatilidad se han publicado en las últimas décadas. Ver Poon y Granger (2003), Hansen y Lunde (2006) y Novales y Gracia (1993). Dando origen a una serie de sofisticaciones del modelo inicial que darán nombre a los modelos GARCH, IGARCH, EARCH, TARCH, SWARCH, QS-ARCH, APARCH, FACTOR-ARCH

## ESPECIFICACIÓN DEL MODELO ARCH

En un modelo ARCH, simultáneamente se presentan tres distintas especificaciones: Primero, media condicional; segundo, varianza condicional; y finalmente, una para la distribución condicional del error.

**Modelo de media condicional** (ecuación 1): tomando la especificación más simple, el modelo GARCH (1,1), expresamos la ecuación de la media como función de variables exógenas más un término de error.

$$y_t = X_t' \theta + u \quad (1)$$

**Modelo de varianza condicional** (ecuación 2): La ecuación sobre la varianza condicional, compuesta por un término constante  $\omega$ , informa sobre la volatilidad de los periodos anteriores  $u_{t-1}^2$ , (término ARCH), y la varianza pronosticada del último periodo  $\sigma_{t-1}^2$  (término GARCH).

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2)$$

**Modelo para la distribución condicional del error:** finalmente, la varianza condicional puede ser re expresada como:

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} u_{t-j}^2 \quad (3)$$

Expresando el error como  $v_t = u_t^2 - \sigma_t^2$ , substituyendo en la ecuación (2), podemos reescribir el modelo en términos de los errores. De esta manera el error sigue un proceso heterocedástico.

$$u_t^2 = \omega + (\alpha + \beta) u_{t-1}^2 + v_t - \beta v_{t-1}^2 \quad (4)$$

Existen otras alternativas al modelo de varianza, entre ellas, IGARCH, TARCH, EGARCH, PARCH entre otras<sup>2</sup>. Partiendo del modelo GARCH (p, q),

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \beta \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha u_{t-i}^2 \quad (5)$$

Si imponemos la restricción que la suma  $\sum_{j=1}^q \beta_j + \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$  obtenemos el modelo IGARCH<sup>3</sup>.

Otra variación utilizada frecuentemente es el modelo TARCH4 5cuya especificación general está dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \beta \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha u_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k u_{t-k}^2 P_{t-k} \quad (6)$$

Donde  $P_t = 1$  si  $u_t < 0$ , (y viceversa).

$u_t < 0$  representa las malas noticias del mercado (y viceversa), lo cual implica efectos diferenciados sobre la varianza condicional., en el caso de haber malas noticias el impacto de estas sería de  $\alpha_i + \gamma_i$ .

Adicional a las anteriores, podemos encontrar el Modelo EGARCH<sup>6</sup>, cuya especificación es:

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \beta \log \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \frac{u_{t-i}}{|\sigma_{t-i}|} + \sum_{k=1}^{\ell} \gamma_k \frac{u_{t-k}}{\sigma_{t-k}} \quad (7)$$

Cuya especificación implica que el efecto promedio es exponencial, en vez de cuadrático.

2 De Arce Borda, Rafael. 2004.

3 Engle, R. & Tim Bollerslev. 1986.

4 Zakoian, Jean M. 1994.

5 Glosten, J. & David E. Runkle. 1993.

6 Nelson, M. 1991.

## Supuestos sobre la distribución condicional del error

En los modelos ARCH, comúnmente se emplean tres distribuciones de probabilidad sobre la distribución del error: La distribución Normal; la distribución t- student, o, la distribución generalizada del error GED. El uso de una de estas implica una forma específica del logaritmo de la probabilidad (log-likelihood)<sup>7</sup>.

En el caso que los residuos sigan una distribución normal, el log-likelihood para la observación t, se estima:

$$L(Y_1, \dots, Y_T; \theta) = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{(y_t - X_t' \theta)^2}{\sigma_t^2} \quad (8)$$

En el caso que los residuos sigan una distribución t-student, el log-likelihood es de la forma:

$$L(Y_1, \dots, Y_T; \theta) = -\frac{1}{2} \log \left( \frac{\pi (v-2) \Gamma(v/2)^2}{\Gamma((v+1)/2)^2} \right) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{(v+1)}{2} \log \left( 1 + \frac{(y_t - X_t' \theta)^2}{\sigma_t^2 (v-2)} \right) \quad (9)$$

Y para una distribución de la forma GED distribución generalizada del error

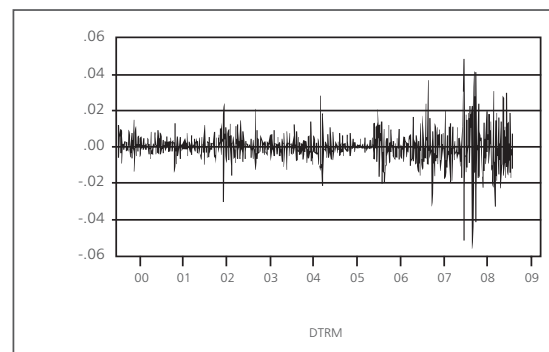
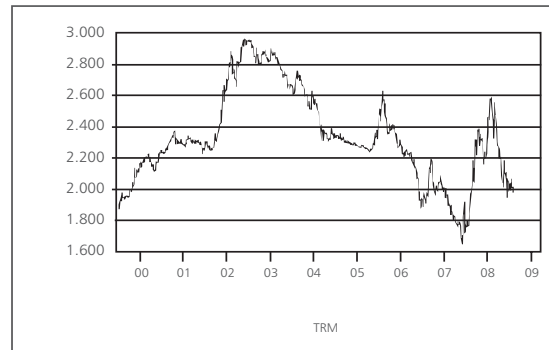
$$L(Y_1, \dots, Y_T; \theta) = -\frac{1}{2} \log \left( \frac{\Gamma(l/\ell)^3}{\Gamma(l)\Gamma(l/2)^2} \right) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \left( 1 + \frac{\Gamma(l)(y_t - X_t' \theta)^2}{\sigma_t^2 \Gamma(l/\ell)} \right)^{\ell/2} \quad (10)$$

7 Vrontos et. al. 2003.

## APLICACIÓN

En esta sección se emplea la serie de la tasa de cambio representativa del mercado (TRM), el cual es el promedio aritmético simple de las tasas ponderadas de las operaciones de compra y venta de divisas efectuada por bancos comerciales, corporaciones financieras, la Financiera Energética Nacional –FEN– y Banco de Comercio Exterior de Colombia –BANCOLDEX. La TRM vigente para cada día es calculada y certificada por la Superintendencia Bancaria<sup>8</sup>. En este trabajo se modela la serie de la TRM diario que va desde el periodo 01 de enero de 2001 al 15 septiembre 2009, que corresponde a 2365 observaciones<sup>9</sup> (ver gráfico 1).

Gráfico 1



En la gráfica 1, se puede apreciar en la parte alta la evolución diaria de la TRM, y en la parte baja, la diferencia del logaritmo de la TRM.

Fuente: [www.banrep.gov.co](http://www.banrep.gov.co)

8 Circular Reglamentaria Externa DODM – 11, del Departamento de Operaciones y Desarrollo de Mercados del Banco de la República de Colombia.

9 Fuente: [www.banrep.gov.co](http://www.banrep.gov.co)

En el gráfico 1, se presenta la evolución diaria de la TRM, el periodo 01 de enero de 2001 al 15 septiembre 2009. El valor más alto alcanzado por la TRM corresponde a 2968.88 y fue alcanzado el 11-02-2003, mientras que el valor más bajo fue 1652,41 alcanzado el 19 - 06 - 2008. En general Se observan tres periodos de comportamiento. El primero caracterizado por una tendencia a la devaluación del peso frente al dólar, la cual abarca desde el 01-01-2000 hasta el 10- 01 del 2003. El segundo que va desde 11- 01 de 2003 hasta el 12-06- 2008 caracterizado por una apreciación constante del peso frente al dólar; y el tercero, del 25- 08-2008 al 30-03-2009, donde se presenta una revaluación del peso frente al dólar y finalmente desde 31- 03- 2009 hasta el 15- 09- 2009, donde el peso se aprecia de nuevo frente al dólar. Igualmente, en la parte baja de la gráfica se puede observar la evolución de la diferencia diaria de la TRM, calculada como la primera diferencia de la TRM. En esta se aprecia periodos de alta volatilidad, los cuales coinciden con los periodos descendientes en los valores de cierre de la TRM. Adicionalmente, se alcanzan a percibir algunos conglomerados de variabilidad que nos dan indicios de la posible existencia de heterocedasticidad condicional autorregresiva.

### Los resultados

Para el periodo considerado, el comportamiento que mejor describe la evolución de la TRM peso/dólar en Colombia, se describe por medio de:

$$dltrm = 0,213847dltrm_{t-1} - 0.119959 dltrm_{t-2} + u$$

como ecuación en media, y

$$\sigma_t^2 = 0.1299954 u_{t-1}^2 + 0.851235 \sigma_{t-1}^2$$

como ecuación en varianza.

Esta ecuación fue obtenida del modelo que mejor replicó la volatilidad <sup>10</sup>de la diferencia del logaritmo de la TRM. Desafortunadamente, los residuos estandarizados no presentan una distribución normal. Este resultado se mantuvo independiente de la especificación del modelo; sin embargo, los estimadores de máxima verosimilitud son consistentes aun cuando la distribución de los errores no sea normal; por tanto, se utilizó una estimación QML<sup>11</sup> cuya implicación es que sólo cambia la varianza del modelo, manteniéndose los coeficientes estimados. Igualmente, puede observarse que el modelo es estacionario, la suma de alfa + beta es menor a la unidad, lo que indica que los *shocks de volatilidad* son bastantes persistentes y que el proceso de varianza es convergente a su valor no condicional de largo plazo.

Tabla 1.

Ecuación en Media				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR (1)	2.14E-01	2.71E-04	5.419.271	0.0000
AR (2)	-1.20E-01	0.025575	8.888.075	0.0000
Ecuación en Varianza				
RESID(-1) ^2	0.1299954	0.039545	7.260.598	0.0000
GARCH(-1)	0.08512535	0.035757	1.868.965	0.0000

Fuente: Cálculos propios, paquete utilizado STATA 10

10 Respecto de las diferentes alternativas estimadas.  
 11 Bollerslev, T. & Jeffrey M. Wooldridge. 1992.

La autocorrelación y autocorrelación parcial exhiben un comportamiento que sugiere ajustar un modelo ARMA con coeficientes autorregresivos y de media móvil, (ver Anexo 1). Con base en esto, se conjeturan posibles especificaciones del modelo que luego se confirmaron mediante la significancia de los rezagos incluidos en la estimación del modelo. Teniendo en cuenta los resultados, los residuales del modelo estimado no presentan correlación serial, es decir, no son correlacionados. La prueba de Portmanteau se realizó considerando hasta 100 rezagos y se concluye la no existencia de evidencia de correlación (Anexo 1).

Por su parte, los resultados de aplicar las pruebas de normalidad de Shapiro Wilk, Shapiro Francia y Kolmogorov Smirnov evidencian la no normalidad de los residuos (Anexo 2).

En el QQ plot y el histograma de los residuales se observa que los residuales tienen colas pesadas, comparados con los de la distribución normal y la presencia de algunos residuales grandes (Anexo 3).

La gráfica de los residuales al cuadrado muestra que puede existir heterocedasticidad condicional autorregresiva (Anexo 4). Existe concentración en los residuales, es decir, los residuales grandes tienden a estar acompañados de residuales grandes y viceversa. Esto da indicios de que la varianza no es constante a través del periodo completo de estimación.

Las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuales al cuadrado, muestran dependencia en el tiempo. Para confirmar la presencia de efecto ARCH, se realizó la prueba de LM de Engle. Los resultados de esta prueba permiten concluir que existe evidencia de efecto ARCH en los residuales (Anexo 5).

Según los resultados anteriores, se procedió a ajustar el modelo ARCH o GARCH más apropiado para la serie. Se probaron varias especificaciones dentro de las cuales se incluyeron, ARCH (1), ARCH (2), TARARCH, EGARCH. Los cuales, asimismo, suelen ser los más utilizados en las series financieras. En ninguna de las especificaciones, se obtuvo normalidad de los residuales por lo que fue necesario

realizar la estimación utilizando errores estándar robustos (Anexo 6).

La prueba de Lundbergh y Terasvirta indica la inexistencia de efecto GARCH sobre los errores estandarizados, la prueba de Bollerslev indica que no se requiere un número mayor de rezagos dentro del modelo GARCH para modelar el comportamiento de la volatilidad, y finalmente la prueba de Engle y Ng evidencia la inexistencia de no linealidades o asimetrías en la varianza (ver anexo 7).

## CONCLUSIÓN

El modelo que mejor replicó la volatilidad de la diferencia del logaritmo de la TRM como modelo en media fue el modelo AR (2); y como modelo en varianza fue el modelo GARCH (1,1). Dado que el modelo es estacionario, indica que los shocks de volatilidad son bastantes persistentes y que el proceso de varianza es convergente a su valor no condicional de largo plazo. La utilidad de este modelo y su relevancia depende del agente económico interesado en usarlos, por un lado estos modelos no son una herramienta útil para la medición del riesgo en el sector real, ya que no se pueden pronosticar suficientes datos para llevar a cabo una predicción que proporcione información relevante para gestionar de manera efectiva el riesgo al que el sector privado está expuesto. Sin embargo este modelo, y este resultado en particular, sí es efectivo en el sector financiero donde, para ciertas áreas (portafolios de mesas de dinero y/o de fondos de pensiones), se requiere medir el riesgo mediante la incorporación continua de información reciente; ya que el modelo GARCH (1,1) arroja una tendencia acertada que permite estimar la volatilidad real observada en el periodo considerado.

## BIBLIOGRAFÍA

- Andersen, T.G., Bollerslev, Tim, Diebold, Francis X, & Ebens, Heiko. "The Distribution of Realized Stock Return Volatility". *Journal of Financial Economics*, 61: 43-76. 2001.
- Andersen, T.G., Bollerslev, Tim, Diebold, Francis X. & Labys, Paul. "Modelling and Forecasting Realized Volatility". *Econométrica*, 71: 579-625. 2003.
- Andersen, T.G., Bollerslev, Tim, Diebold, F.X. & Labys, Paul. "The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility". *Journal of the American Statistical Association*, 96: 42-55. 2001.
- De Arce Borda, Rafael. 20 Years of Arch Modelling: a Survey of Different Models in the Family. *Estudios de Economía Aplicada*, 22(1). 2004.
- Bollerslev, Tim. "Modeling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach". *Review of Economics and Statistics*, 72: 498-505. 1990.
- Bollerslev, Tim. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity" *Journal of Econometrics*, 31: 307-327. 1986.
- Bollerslev, Tim. "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return". *Review of Economics and Statistics*, 69 (3): 542-547. 1987.
- Bollerslev, Tim, R.Y. Chou & K.F. Kroner. "ARCH Models in Finance". *Journal of Econometrics*, 52: 5-59. 1992.
- Bollerslev, Tim, Chou, Ray Y. & Kroner, Kenneth F. "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence". *Journal of Econometrics*, 52: 5-59.
- Bollerslev, Tim, Engle, Robert, F. & Nelson, Daniel B. "ARCH Models". Chapter 49 in Robert F. Engle and Daniel L. McFadden (eds.). *Handbook of Econometrics*, 4. Amsterdam: Elsevier Science B.V. 1994.
- Bollerslev, Tim & Wooldridge, Jeffrey, M. "Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances". *Econometric Reviews*, 11: 143-172. 1992.
- Bollerslev, Tim. "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts". *International Economic Review*, 39: 885-905. 1998.
- Campbell, J.Y., Lo, A.W. & MacKinlay, A.C. *The Econometrics of Financial Markets* Princeton University Press. 1997.
- Ding, Zhuanxin, Granger, C. W. J. & Engle, R. F. "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model". *Journal of Empirical Finance*, 1: 83-106. 1993.
- Engle, R.F. "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive. 2002.
- Engle, R.F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation". *Econométrica*, 50: 987-1008. 1982.



- Engle, R.F. & Bollerslev, Tim. "Modelling the Persistence of Conditional Variances". *Econometric Reviews*, 5: 1-50. 1986.
- Engle, Robert F. "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation". *Econometría*, 50: 987-1008. 1982.
- Engle, Robert F. & Bollerslev, Tim. "Modeling the Persistence of Conditional Variances". *Econometric Reviews*, 5: 1-50. 1996.
- Engle, Robert F., Lilien, David M. & Robins, Russell P. "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model". *Econometría*, 55: 391-407. 1987.
- Engle, R.F. ARCH Selected Readings. Oxford University Press. 1995.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. & Runkle, D. "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Normal Excess Return on Stocks". *Journal of Finance*, 48: 1779-1801. 1993.
- Glosten, Lawrence R., Jagannathan, Ravi & Runkle, David E. "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks". Staff Report 157, Federal Reserve Bank of Minneapolis. 1993.
- Nelson, Daniel B. "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach". *Econometría*, 59: 347-370. 1991.
- Schwert, W. "Stock Volatility and Crash of '87". *Review of Financial Studies*, 3: 77-102.
- Taylor, S. *Modeling Financial Time Series*, New York: John Wiley & Sons. 1986.
- Vrontos, D., Dellaportas, P. & Politis, D. "Full-factor Multivariate GARCH model. *Econometrics Journal*, 6: 312-334. 2003.
- Zakoian, Jean-Michel. "Threshold heteroskedastic models". *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5): 931-955. 1994.